Modelos de Crecimiento Endógeno

Mauricio Tejada

ILADES - Universidad Alberto Hurtado

Segundo Semestre 2018

Introducción

- Desde las contribuciones de Romer (1986) y Lucas (1988) la teoría del crecimiento económico se convierte en uno de los campos de investigación más activos de los últimos tiempos.
- Los modelo de Crecimiento Endógeno son modelos en los cuales, a diferencia del modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, el crecimiento económico surge de forma endógena.
- La idea central es incorporar explícitamente al modelo otros factores reproducibles (como capital humano) o la generación de nuevas tecnologías, tal que la economía puede experimentar crecimiento sin acudir a un factor exógeno.
- La tecnología surge o bien como subproducto de la actividad económica o bien como fruto de una actividad (I+D) guiada por incentivos económicos individuales.
- La literatura sobre crecimiento endógeno es muy extensa y aquí nos limitaremos a ver algunos ejemplos del tipo de modelos que se suelen utilizar.

El Modelo AK
Asignación Centralizada

- El producto total de la economía esta dado por:

$$Y_t = F(K_t, N_t) = AK_t$$

donde $A > 0$ es un parámetros exógeno y N_t no crece.

- En forma intensiva:

$$y_t = F(k_t, 1) = Ak_t$$

- El planificado social resuelve el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ s.a & c_t + k_{t+1} = Ak_t + (1-\delta)k_t \end{array}$$

donde

El Modelo AK
Asignación Centralizada

- Las CPO son:

$$\begin{aligned} \frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} &= \beta(1 + A - \delta) \\ c_t + k_{t+1} &= (1 + A - \delta)k_t \\ \lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t)k_{t+1} &= 0 \end{aligned}$$

- Suponga $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$, la ecuación de Euler es:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = [\beta(1 + A - \delta)]^{\frac{1}{\sigma}}$$

alternativamente:

$$\ln c_{t+1} - \ln c_t = \frac{1}{\sigma}\left[\ln(1 + A - \delta) - \ln(1 + \rho)\right]$$

- El crecimiento del consumo es proporcional a la diferencia entre el retorno neto del capital y la tasa de descuento.

El Modelo AK
Asignación Centralizada

- La restricción de recursos es:

$$c_t + k_{t+1} = (1 + A - \delta)k_t$$

- La restricción de recursos es lineal en k y las preferencias son homotéticas: *La función de política debiera ser lineal.*
- Nuestra conjetura de solución es:

$$\begin{aligned} c_t &= (1-s)(1 + A - \delta)k_t \\ k_{t+1} &= s(1 + A - \delta)k_t \end{aligned}$$

donde s es un coeficiente que debe ser determinado.
- Note que bajo nuestra conjetura:

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{y_{t+1}}{y_t}$$

El Modelo AK
Asignación Centralizada

- Para asegurar crecimiento perpetuo tenemos que: $\beta(1 + A - \delta) > 1$.
- De la restricción de recursos sabemos que

$$\frac{c_t}{k_t} + \frac{k_{t+1}}{k_t} = (1 + A - \delta)$$

y por tanto:

$$\frac{c_t}{k_t} = (1 + A - \delta) - [\beta(1 + A - \delta)]^{\frac{1}{\sigma}}$$

- Usando $c_t = (1-s)(1 + A - \delta)k_t$ y resolviendo para s tenemos:

$$s = \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1 + A - \delta)^{\frac{1}{\sigma}-1}$$

- De manera equivalente (definiendo $R = A - \delta$, el retorno social neto del capital):

$$s = \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1 + r)^{\frac{1}{\sigma}-1}$$

El Modelo AK

El Equilibrio Competitivo

- Existe un número muy grande de firmas con acceso a la tecnología AK. Si las firmas maximizan el pago de los factores será:

$$r = A \quad y \quad w = 0$$

- Existe un número muy grande de familias y el modelo admite representación mediante un agente representativo.
- El problema del agente representativo es:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \\ s.a \quad & c_t + k_{t+1} = rk_t + (1-\delta)k_t \end{aligned}$$

- La ecuación de Euler para las Familias es:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = [\beta(1+R)]^{\frac{1}{\sigma}} = [\beta(1+A-\delta)]^{\frac{1}{\sigma}}$$

- Note que la asignación es la misma que la del Planificador central. El equilibrio competitivo es Pareto óptimo.

El Modelo AK

El Equilibrio Competitivo

Proposición

Considere la economía AK con preferencias CRRA y suponga que $\beta(1+A-\delta) > 1 > s = \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+A-\delta)^{\frac{1}{\sigma}-1}$. Entonces, el equilibrio competitivo es Pareto eficiente y la economía exhibe un crecimiento sostenido. El capital, el producto y el consumo crecen a la misma tasa:

$$[\beta(1+A-\delta)]^{\frac{1}{\sigma}} > 1$$

y el consumo y la inversión están dados por:

$$\begin{aligned} c_t &= (1-s)(1+A-\delta)k_t \\ k_{t+1} &= s(1+A-\delta)k_t \end{aligned}$$

con $s = \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+A-\delta)^{\frac{1}{\sigma}-1}$.

El Modelo AK
El Equilibrio Competitivo

- Note que las tasa de crecimiento es creciente en A, $1/\sigma$, y β. Por tanto, diferencias en la tecnología y en las preferencias pueden inducir a diferencias en el crecimiento de largo plazo.

Modelo con Capital Humano
Asignación Centralizada

- El producto total de la economía esta dado por:

$$Y_t = F(K_t, H_t) = F(K_t, h_t L_t)$$

  donde $F(\cdot)$ es neoclásica, K_t es el stock de capital agregado, h_t es el stock de capital humano por trabajador, y $H_t = h_t L_t$ es el trabajo efectivo.
- En términos per cápita:

$$y_t = F(k_t, h_t)$$

- El producto puede ser usado para consumo o para acumular capital (físico y humano)

$$c_t + i_t^k + i_t^h \leq y_t$$

Modelo con Capital Humano
Asignación Centralizada

- Las leyes de movimiento de los stocks de capital están dadas por:

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= (1-\delta_k)k_t + i_t^k \\ h_{t+1} &= (1-\delta_h)h_t + i_t^h \end{aligned}$$

- Combinando la restricción de recursos con las leyes de movimiento:

$$c_t + k_{t+1} + h_{t+1} = F(k_t, h_t) + (1-\delta_k)k_t + (1-\delta_h)h_t$$

- El problema del planificador central es entonces:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, k_{t+1}, h_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ s.a \quad & c_t + k_{t+1} + h_{t+1} = F(k_t, h_t) + (1-\delta_k)k_t + (1-\delta_h)h_t \\ & k_0, h_0 \ \ dados. \end{aligned}$$

Modelo con Capital Humano
Asignación Centralizada

- Las CPO son:

$$\begin{aligned} \frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} &= \beta\left[1 + F_k(k_{t+1}, h_{t+1}) - \delta_k\right] \\ \frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} &= \beta\left[1 + F_h(k_{t+1}, h_{t+1}) - \delta_h\right] \\ c_t + k_{t+1} + h_{t+1} &= F(k_t, h_t) + (1-\delta_k)k_t + (1-\delta_k)h_t \end{aligned}$$

- Usando la función de producción (con RCE) tenemos:

$$y_t = F(k_t, h_t) = F\left(\frac{k_t}{h_t}, 1\right) h_t = F\left(\frac{k_t}{h_t}, 1\right) \frac{h_t}{k_t + h_t}\left[k_t + h_t\right]$$

o de manera equivalente:

$$y_t = A(\kappa)\left[k_t + h_t\right]$$

donde:

$$A(\kappa) = \frac{F(\kappa, 1)}{1+\kappa}$$

es el retorno del capital total.

Modelo con Capital Humano

Asignación Centralizada

- Multiplicando las condiciones de Euler por $\frac{k_{t+1}}{k_{t+1}+h_{t+1}}$ y $\frac{h_{t+1}}{k_{t+1}+h_{t+1}}$, respectivamente, y sumándolas tenemos:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta \left\{ 1 + \frac{k_{t+1}\left[F_k(k_{t+1}, h_{t+1}) - \delta_k\right] + h_{t+1}\left[F_h(k_{t+1}, h_{t+1}) - \delta_h\right]}{k_{t+1} + h_{t+1}} \right\}$$

- Usando el teorema de Euler:

$$F(k_{t+1}, h_{t+1}) = k_{t+1}F_k(\cdot) + h_{t+1}F_h(\cdot)$$

- Definamos:

$$\delta(\kappa) = \frac{\kappa}{1+\kappa}\delta_k + \frac{1}{1+\kappa}\delta_h$$

- Entonces:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta\left[1 + A(\kappa_{t+1}) - \delta(\kappa_{t+1})\right]$$

Modelo con Capital Humano

Asignación Centralizada

- Combinado las dos ecuaciones de Euler podemos inferir que:

$$F_k(k_{t+1}, h_{t+1}) - \delta_k = F_h(k_{t+1}, h_{t+1}) - \delta_h$$

- Note que $F_k(k_{t+1}, h_{t+1}) = F_k(\kappa_{t+1})$ y $F_h(k_{t+1}, h_{t+1}) = F_h(\kappa_{t+1})$. Entonces esta condición determina un único estado estacionario en κ:
- Por ejemplo: si $F(k,h) = k^\alpha h^{1-\alpha}$ y $\delta_k = \delta_h$ tenemos que:

$$\frac{F_h}{F_k} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{h}{k} \Rightarrow \kappa^* = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

- Perspectiva alternativa: Note que κ^* resuelve:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & F(k_{t+1}, h_{t+1}) - \delta_k k_{t+1} - \delta_h h_{t+1} \\ s.a \quad & k_{t+1} + h_{t+1} = constante \end{aligned}$$

- De manera equivalente:

$$\kappa^* = argmax_\kappa \left[1 + A(\kappa) - \delta(\kappa)\right]$$

esto es, se busca el ratio capital físico vs. capital humano que maximiza el retorno de los ahorros.

Proposición

Considere la economía con capital físico y capital humano descrita arriba y sea:

$$\kappa^* = argmax_\kappa \left[1 + A(\kappa) - \delta(\kappa)\right]$$

y suponga que $(\beta, \sigma, F, \delta_k, \delta_h)$ *satisfacen* $\beta(1 + A(\kappa) - \delta(\kappa)) > 1 > \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1 + A(\kappa) - \delta(\kappa))^{\frac{1}{\sigma}-1}$ *con* $u(c_t)$ *una función de utilidad CRRA. Entonces la economía exhibe crecimiento balanceado (y sostenido). El capital físico, el humano, el consumo y el producto crecen a la misma tasa:*

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{h_{t+1}}{h_t} = \frac{c_{t+1}}{c_t} = \{\beta\left[1 + A(\kappa) - \delta(\kappa)\right]\}^{\frac{1}{\sigma}} > 1$$

mientras que las tasa de inversión es $\left\{\beta^{\frac{1}{\sigma}}\left[1 + A(\kappa) - \delta(\kappa)\right]\right\}^{\frac{1}{\sigma}-1}$ *y el ratio óptimo de capital físico sobre humano es* κ^**. Las tasa de crecimiento es creciente en la productividad, creciente en la ESI y decreciente en la tasa de descuento.*

Modelo con Capital Humano

Equilibrio Competitivo

- La restricción presupuestaria del consumidor representativo es:

$$c_t + i_t^k + i_t^h + (b_{t+1} - b_t) = r_t k_t + w_t h_t + R_t b_t$$

- Las leyes de movimiento de ambos tipos de capital son:

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= i_t^k + (1-\delta_k)k_t \\ h_{t+1} &= i_t^h + (1-\delta_h)h_t \end{aligned}$$

- Entonces, el problema del consumidor representativo es:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, k_{t+1}, h_{t+1}, b_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ s.a \quad & c_t + k_{t+1} + h_{t+1} + b_{t+1} = (1 + r_t - \delta_k)k_t \\ & +(1 + w_t - \delta_h)h_t + (1 + R_t)b_t \end{aligned}$$

- Note que $r_t - \delta_k$ y $w_t - \delta_h$ son los retornos netos de mercado del capital físico y humanos, respectivamente.

Modelo con Capital Humano

Equilibrio Competitivo

- La CPO para una solución interior es:

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = 1 + R_{t+1} = 1 + r_{t+1} - \delta_k = 1 + w_{t+1} - \delta_h$$

- Las firmas maximizan beneficios y los mercados son competitivos:

$$r_t = F_k(\kappa_t, 1) \;\; y \;\; w_t = F_h(\kappa_t, 1)$$

  donde $\kappa_t = k_t/h_t$.
- Combinando $r_t - \delta_k = w_t - \delta_h$ tenemos:

$$\frac{F_k(\kappa_t, 1)}{F_h(\kappa_t, 1)} = \frac{r_t}{w_t} = \frac{\delta_h}{\delta_k}$$

  y por tanto $\kappa_t = \kappa^*$ como en el óptimo de Pareto.
- Además $R_t = A(\kappa^*) - \delta(\kappa^*)$. El equilibrio competitivo es Pareto óptimo. Esto ocurre porque los retornos sociales del capital coinciden con los privados.

- Los beneficio de acumular capital humano son incrementos en la productividad. El costo es que absorbe recursos con usos alternativos.
- El capital humano también genera externalidades positivas en la sociedad.
- Hasta ahora hemos supuesto que el capital humanos tiene la misma tecnología de acumulación que el físico.
- Suponga que la producción de una firma $m \in [0, M]$ está caracterizada por:
$$Y_t^m = F(K_t^m, h_t L_t^m)$$
donde h_t representa el nivel agregado de capital humano o conocimiento.
- h_t es endógeno desde el punto de vista de la sociedad pero exógeno desde el punto de vista de la empresa.
- Cada empresa maximiza beneficios:
$$\Pi_t^m = F(K_t^m, h_t L_t^m) - r_t K_t^m - w_t L_t^m$$

- Las condiciones de primer orden:
$$\begin{aligned} r_t &= F_K(K_t^m, h_t L_t^m) \\ w_t &= F_L(K_t^m, h_t L_t^m) h_t \end{aligned}$$
Como lo hicimos en el modelo de Solow-Swan, usando las condiciones que clarean los mercados de factores tenemos que $K_t^m / L_t^m = k_t$ donde k_t es el capital por trabajador agregado.
- Entonces, dados los precios de los factores:
$$\begin{aligned} r_t &= F_k(k_t, h_t) = f'(\kappa_t) \\ w_t &= F_L(k_t, h_t) = \left[f(\kappa_t) - f'(\kappa_t)\kappa_t \right] h_t \end{aligned}$$
donde $f(\kappa_t) = F(\kappa_t, 1)$ y $\kappa_t = k_t / h_t$.

Aprendiendo al Hacer y Desbordes de Conocimiento
Equilibrio Competitivo

- El problema de las familias es:

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}, b_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$
$$s.a \quad c_t + k_{t+1} + b_{t+1} = (1 + r_t - \delta)k_t + (1 + R_t)b_t$$

- La CPO para una solución interior es:

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = 1 + R_{t+1} = 1 + r_{t+1} - \delta$$

- Para cerrar el modelo es necesario definir como h_t es determinado. Arrow y Romer asumen que *la acumulación de capital humano es un sub-producto del proceso de aprendizaje en la producción*.

$$h_t = \eta k_t$$

con $\eta > 0$ alguna constante.

- Así, el ratio κ_t esta determinado: $\kappa_t = \frac{1}{\eta}$

Aprendiendo al Hacer y Desbordes de Conocimiento
Equilibrio Competitivo

- Definamos las constantes A y ω como:

$$A = f'(1/\eta) \quad y \quad \omega = f(1/\eta)\eta - f'(1/\eta)$$

- Los precios de equilibrio de los factores son por tanto:

$$r_t = A \quad y \quad w_t = \omega k_t$$

- Usando la ecuación de Euler tenemos:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta (1 + A - \delta)$$

- Finalmente, ya se mostró que en este contexto el capital y el producto crecen a la misma tasa que el consumo.

Aprendiendo al Hacer y Desbordes de Conocimiento
Equilibrio Competitivo

Proposición

Sean $A = f'(1/\eta)$ y $\omega = f(1/\eta)\eta - f'(1/\eta)$ y suponga que $\beta(1 + A - \delta) > 1 > \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1 + A - \delta)^{\frac{1}{\sigma}-1}$ con $u(c_t)$ una función de utilidad CRRA. Entonces la economía exhibe crecimiento balanceado (y sostenido). El capital físico, el consumo, el producto, el conocimiento y los salarios crecen a la misma tasa:

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{c_{t+1}}{c_t} = \{\beta\,[1 + A - \delta]\}^{\frac{1}{\sigma}} > 1$$

El salario está dado por $w_t = \omega k_t$ mientras que la inversión es igual al ahorro con tasa de ahorro $s = \beta^{\frac{1}{\sigma}}\,[1 + A - \delta]^{\frac{1}{\sigma}-1}$.

Aprendiendo al Hacer y Desbordes de Conocimiento
Asignación Pareto Eficiente

- Analicemos ahora la asignación del Planificador Central.
- El Planificador reconoce que el conocimiento es proporcional al stock de capital e internaliza el efecto del aprendizaje en la práctica.
- Entonces la función de producción es:

$$y_t = F(k_t, h_t) = A^* k_t$$

  donde $A^* = f(1/\eta)\eta = A + \omega$ representa el retorno social del capital.
- Entonces, la tecnología de Planificador es una del tipo AK.
- La ecuación de Euler seria entonces:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta\,(1 + A^* - \delta)$$

- Note que el retorno social del capital es mayor que el retorno privado.

$$A^* > A = r_t$$

- La diferencia es ω, la fracción del retorno social que es desperdiciada en forma de ingreso al trabajo.

Aprendiendo al Hacer y Desbordes de Conocimiento
Asignación Pareto Eficiente

Proposición

Sea $A^* = A + \omega$ y suponga que $\beta(1 + A - \delta) > 1 > \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1 + A - \delta)^{\frac{1}{\sigma}-1}$ con $u(c_t)$ una función de utilidad CRRA. Entonces la asignación Pareto óptima exhibe crecimiento balanceado (y sostenido). El capital físico, el consumo, el producto, el conocimiento y los salarios crecen a la misma tasa:

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{c_{t+1}}{c_t} = \{\beta\,[1 + A^* - \delta]\}^{\frac{1}{\sigma}} > 1$$

Note que $A^* > A$ y por tanto la tasa de crecimiento del equilibrio competitivo es menor que la de la asignación Pareto óptima.

Gasto Público y Crecimiento
Equilibrio Competitivo

- El Gobierno influencia a la economía por varios canales:
  - Decide el tamaño de los impuestos.
  - Decide la forma que toman los impuestos (impuestos al valor agregado, sobre la renta, sobre sociedades, sobre transmisiones patrimoniales e incluso el impuesto inflacionario sobre el dinero).
  - Decide el tamaño del gasto.
  - Decide el tipo de gasto (carreteras, armamento, tecnología, subsidios de desempleo, pensiones de jubilación, etc.).
  - Decide la Regulación (regulación antimonopolio, leyes de garantía de derechos de propiedad, leyes de libre circulación de mercancías, etc.)
  - Política Fiscal y Monetaria.
- Estudiamos la relación el tamaño del gasto público y el crecimiento económico.
- Partimos del supuesto que el gasto público es deseable (externalidad positiva en la producción o en el consumo).
- Barro (1990): El gasto público es productivo. Además son flujos productivos por lo que el bien público debe ser suministrado en cada momento del tiempo.

- Función de producción con bienes públicos (no rivales y no excluyentes):

$$y_m = Ak_m^{\alpha} G^{1-\alpha}$$

- Función de producción bienes suministrados por el gobierno son privados en el sentido de que son rivales y excluibles.

$$y_m = Ak_m^{\alpha} g_m^{1-\alpha} \quad con \quad G = \sum_{m=0}^{M} g_m$$

- Función de producción con bienes públicos que puede ser parcialmente excluibles o sujetos a congestión.

$$y_m = Ak_m^{\alpha} \left(\frac{G}{K}\right)^{1-\alpha}$$

- Suponga que la población crece a tasa n: $L_{t+1}/L_t = 1+n$, que el gobierno cobra un impuesto al ingreso τ y que el presupuesto del gobierno está equilibrado $g = \tau y$.
- Para la familia representativa tenemos la restricción de recursos:

$$c_t + i_t = r_t k_t + w_t$$

- Ley de movimiento del stock de capital:

$$(1+n)k_{t+1} \quad = \quad (1-\delta)k_t + i_t$$

- Combinando la restricción de recursos con las leyes de movimiento:

$$c_t + (1+n)k_{t+1} \quad = \quad r_t k_t + w_t + (1-\delta)k_t$$

- El problema de la familia representativa es entonces:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ s.a \quad & c_t + (1+n)k_{t+1} = r_t k_t + w_t + (1-\delta)k_t \\ & k_0 \;\; dado. \end{aligned}$$

Gasto Público y Crecimiento
Equilibrio Competitivo

- El Lagrangiano (para una solución interior) es:

$$\ell_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u(c_t) + \lambda_t \left(r_t k_t + w_t + (1-\delta)k_t - c_t - (1+n)k_{t+1}\right)\right]$$

- Las CPO para las Familias son:

$$\begin{aligned} u'(c_t) - \lambda_t &= 0 \\ -(1+n)\lambda_t + \beta\lambda_{t+1}(r_{t+1} + 1 - \delta) &= 0 \\ (r_t k_t + w_t + (1-\delta)k_t - c_t - (1+n)k_{t+1}) &= 0 \end{aligned}$$

- Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} &= \frac{\beta\left[1 + r_{t+1} - \delta\right]}{1+n} \\ c_t + (1+n)k_{t+1} &= r_t k_t + w_t + (1-\delta)k_t \end{aligned}$$

- Usando las preferencias CRRA tenemos:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left\{\frac{\beta\left[1 + r_{t+1} - \delta\right]}{1+n}\right\}^{\frac{1}{\sigma}}$$

Gasto Público y Crecimiento
Equilibrio Competitivo

- Por otro lado las empresas maximizan beneficios netos de impuestos:

$$\max_{\{k_t^m\}} (1-\tau)Y_t^m - r_t K_t^m - w_t L_t^m$$

- Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} r_t &= (1-\tau) f_k(X_t, g_t^m) \\ w_t &= (1-\tau)\left[f(X_t, g_t^m) - f_k(X_t, g_t^m)X_t\right] \end{aligned}$$

con $X_t = K_t^m / L_t^m$.

- Sabemos que $X_t = k_t$ y por tanto

$$\begin{aligned} r_t &= (1-\tau) f_k(k_t, g_t) \\ w_t &= (1-\tau)\left[f(k_t, g_t) - f_k(k_t, g_t)k_t\right] \end{aligned}$$

- Note que $y_t = A k_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha}$ tenemos:

$$r_t = \alpha(1-\tau)A\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha}$$

Gasto Público y Crecimiento
Equilibrio Competitivo

- Reemplazando en la ecuación de Euler:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left\{ \frac{\beta \left[1 + \alpha(1-\tau)A\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} - \delta \right]}{1+n} \right\}^{\frac{1}{\sigma}}$$

- Note que $g = \tau y$ entonces:

$$\frac{g_t}{y_t} = \tau \Rightarrow \frac{g_t}{Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha}} = \tau \Rightarrow \frac{g_t}{k_t} = (A\tau)^{\frac{1}{\alpha}}$$

- Entonces:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left\{ \frac{\beta \left[1 + \alpha(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}} (\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \delta \right]}{1+n} \right\}^{\frac{1}{\sigma}}$$

Gasto Público y Crecimiento
Equilibrio Competitivo

- En el agregado tenemos:

$$\begin{aligned} c_t + (1+n)k_{t+1} &= (1-\tau)y_t + (1-\delta)k_t \\ c_t + (1+n)k_{t+1} &= \left[(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}} (\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1 - \delta\right] k_t \end{aligned}$$

- Nuestra conjetura de solución es:

$$\begin{aligned} c_t &= (1-s)\left[(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}} (\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1 - \delta\right] k_t \\ (1+n)k_{t+1} &= s\left[(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}} (\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1 - \delta\right] k_t \end{aligned}$$

  donde s es un coeficiente que debe ser determinado.
- Note que bajo nuestra conjetura:

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{y_{t+1}}{y_t}$$

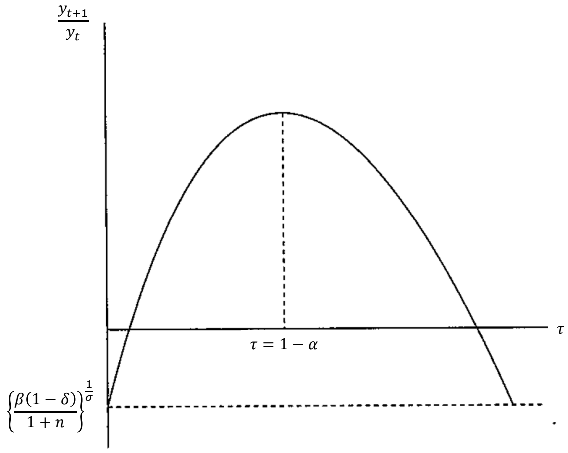
- Entonces:

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \left\{ \frac{\beta \left[1 + \alpha(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}} (\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \delta \right]}{1+n} \right\}^{\frac{1}{\sigma}}$$

- ¿Cuál es el valor de s?

Gasto Público y Crecimiento
Equilibrio Competitivo

- Relación entre el tamaño del Estado (g/y) y la tasa de crecimiento:



- Existe una tasa de impuesto que maximiza el crecimiento de la economía:

$$\frac{\partial y_{t+1}/y_t}{\partial \tau} = 0 \Rightarrow \tau = 1 - \alpha$$

Gasto Público y Crecimiento
Equilibrio Competitivo

Proposición

Suponga que $\beta\left[1 + \alpha(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \delta\right] > 1 + n$ *y que* $u(c_t)$ *es una función de utilidad CRRA. Entonces la economía exhibe crecimiento balanceado (y sostenido). El capital físico, el consumo, el producto crecen a la misma tasa:*

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{c_{t+1}}{c_t} = \left\{\frac{\beta\left[1 + \alpha(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \delta\right]}{1+n}\right\}^{\frac{1}{\sigma}}$$

El retorno del capital esta dado $r_t = \alpha(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$*, mientras que salario dado por* $w_t = (1-\alpha)(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}k_t$*. Finalmente, el tamaño óptimo del gobierno es:*

$$\frac{g_t}{y_t} = \tau = 1 - \alpha$$

Gasto Público y Crecimiento
Asignación Centralizada

- Restricción de recursos:

$$c_t + i_t + g_t = y_t \Rightarrow c_t + i_t = (1-\tau)y_t$$

- Ley de movimiento del stock de capital:

$$(1+n)k_{t+1} \quad = \quad (1-\delta)k_t + i_t$$

- Combinando la restricción de recursos con las leyes de movimiento:

$$c_t + (1+n)k_{t+1} \quad = \quad y_t - g_t + (1-\delta)k_t$$

- El problema del Planificador Central es entonces:

$$\begin{aligned}
\max_{\{c_t, k_{t+1}, g_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
s.a \quad & c_t + (1+n)k_{t+1} = y_t - g_t + (1-\delta)k_t \\
& k_0 \;\; dado.
\end{aligned}$$

Gasto Público y Crecimiento
Asignación Centralizada

- El Lagrangiano (para una solución interior) es:

$$\ell_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u(c_t) + \lambda_t \left(A k_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t - g_t - c_t - (1+n)k_{t+1} \right) \right]$$

- Las CPO para el Planificador son:

$$\begin{aligned}
u'(c_t) - \lambda_t &= 0 \\
-(1+n)\lambda_t + \beta\lambda_{t+1}(\alpha A \left(\frac{g_{t+1}}{k_{t+1}}\right)^{1-\alpha} + 1 - \delta) &= 0 \\
(1-\alpha)\, A \left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{-\alpha} - 1 &= 0 \\
(y_t + (1-\delta)k_t - g_t - c_t - (1+n)k_{t+1}) &= 0
\end{aligned}$$

- Note que:

$$\frac{g_t}{y_t} = \tau \Rightarrow \frac{g_t}{Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha}} = \tau \Rightarrow \frac{g_t}{k_t} = (A\tau)^{\frac{1}{\alpha}}$$

- Por tanto:

$$\tau = \frac{g_t}{y_t} = 1 - \alpha$$

- Usando las preferencias CRRA tenemos:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left\{ \frac{\beta \left[\alpha A^{\frac{1}{\alpha}} (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1 - \delta \right]}{1+n} \right\}^{\frac{1}{\sigma}}$$

Proposición

Suponga que $\beta \left[\alpha A^{\frac{1}{\alpha}} (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1 - \delta \right] > 1 + n$ y que $u(c_t)$ es una función de utilidad CRRA. Entonces la asignación Pareto óptima exhibe crecimiento balanceado (y sostenido). El capital físico, el consumo, y el producto crecen a la misma tasa:

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{c_{t+1}}{c_t} = \left\{ \frac{\beta \left[\alpha A^{\frac{1}{\alpha}} (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1 - \delta \right]}{1+n} \right\}^{\frac{1}{\sigma}} > 1$$

Note que la tasa de crecimiento del equilibrio competitivo es menor que la de la asignación Pareto óptima para todo τ. Finalmente, note que la tecnología puede ser reescrita como: $y_t = A^{\frac{1}{\alpha}} (\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} k_t = A(\tau) k_t$

Nota sobre la CTV y estabilidad en el modelo AK
CTV y Utilidad Acotada

- Los modelos de crecimiento endógeno muestran crecimiento sostenido: ¿está el problema de optimización acotado?
- Como todos los modelos vistos, de una u otro forma, colapsan en un modelo AK, es razonable (y más simple) centrarnos en este último.
- Retomemos el modelo AK pero ahora con crecimiento de la población. El problema del Planificador era:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ s.a \quad & c_t + (1+n)k_{t+1} = Ak_t + (1-\delta)k_t \end{aligned}$$

- Si el horizonte fuera finito e igual a T la CTV sería:

$$\beta^T \lambda_T k_{T+1} = 0$$

- En horizonte infinito tendríamos:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \lambda_t k_{t+1} = 0$$

Nota sobre la CTV y estabilidad en el modelo AK
CTV y Utilidad Acotada

- Del lagrangiano del problema sabemos que:

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{1+n}{\beta(A+1-\delta)} \Rightarrow \lambda_t = \left(\frac{1+n}{\beta(A+1-\delta)}\right)^t \lambda_0$$

- Por otro lado sabemos que para la CRRA:

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = \left[\frac{\beta(1+A-\delta)}{1+n}\right]^{\frac{1}{\sigma}} \Rightarrow k_{t+1} = \left[\frac{\beta(1+A-\delta)}{1+n}\right]^{\frac{t+1}{\sigma}} k_0$$

- Reemplazando:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \left(\frac{1+n}{\beta(A+1-\delta)}\right)^t \left[\frac{\beta(1+A-\delta)}{1+n}\right]^{\frac{t+1}{\sigma}} \lambda_0 k_0 = 0$$

- Entonces:

$$\lim_{t\to\infty} \left\{\beta\left[\frac{1+A-\delta}{1+n}\right]^{(1-\sigma)}\right\}^{\frac{t}{\sigma}} = 0 \iff \left[\frac{1+A-\delta}{1+n}\right]^{(1-\sigma)} < \frac{1}{\beta}$$

Nota sobre la CTV y estabilidad en el modelo AK

CTV y Utilidad Acotada

- Esta condición genera:
  - Un límite superior para la tasa de crecimiento: $\frac{k_{t+1}}{k_t} < \frac{1}{\beta^{\frac{1}{1-\sigma}}}$ si $\sigma < 1$.
  - Un límite inferior para la tasa de crecimiento: $\frac{k_{t+1}}{k_t} > \frac{1}{\beta^{\frac{1}{1-\sigma}}}$ si $\sigma > 1$.
- Más aún el problema está acotado:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{\left\{ \left[\frac{\beta(1+A-\delta)}{1+n} \right]^{\frac{t}{\sigma}} c_0 \right\}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \\
&= \frac{c_0^{1-\sigma}}{1-\sigma} \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta \left[\frac{1+A-\delta}{1+n} \right]^{(1-\sigma)} \right\}^{\frac{t}{\sigma}} - \frac{1}{1-\sigma} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t
\end{aligned}$$

- Entonces el problema es acotado siempre que se cumpla la CTV.

El Mundo de la Ideas y El Modelo de Variedades de Romer

- Existen tres sectores: el sector del bien final, el sector de bienes intermedios, y el sector de I+D.
- El sector del bien final es perfectamente competitivo (los beneficios son cero). El producto se consume o se usa como insumo en los otros dos sectores.
- En el sector del bien intermedio existe competencia monopolística (diferenciación de producto).
  - Cada productor es cuasi-monopolista y tiene beneficios positivos.
  - Para ser una empresa de este sector debe adquirir primero un “blueprint” del sector I+D.
  - El “blueprint” es la tecnología (conocimiento) para transformar el bien final en uno intermedio diferenciado.
- El sector I+D es competitivo. Los investigadores producen “blueprints” los cuales están protegidos por patentes perpetuas.
  - Existen subastas de “blueprints” por lo que este sector absorbe todos los beneficios del sector de bienes intermedios.
  - Existe libre entrada en el sector I+D.

- La tecnología del sector del bien final es neoclásica y usa trabajo L_t y el insumo compuesto χ_t:

$$Y_t = F(\chi_t, L_t) = A(\chi_t)^{\alpha}(L_t)^{1-\alpha}$$

- Wl insumo compuesto esta dado por la agregación CES de los bienes intermedios:

$$\chi_t = \left[\int_0^{N_t} X_{t,j}^{\epsilon} dj\right]^{\frac{1}{\epsilon}}$$

donde N_t denota el número de variedades en el sector de bienes intermedios y $X_{t,j}$ la cantidad de la variedad j.

- En lo que sigue asumimos que $\epsilon = \alpha$, lo que implica:

$$Y_t = F(\chi_t, L_t) = A(L_t)^{1-\alpha} \int_0^{N_t} (X_{t,j})^{\alpha} dj$$

- Este supuesto implica que el producto marginal de cada bien intermedio es independiente de los demás.

$$\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t,j}} = \alpha A \left(\frac{L_t}{X_{t,j}}\right)^{1-\alpha}$$

- En una versión más general, los productos intermedios podrían ser complementos o substitutos.
- Vamos a interpretar los bienes intermedios como bienes de capital y por tanto en el agregado:

$$K_t = \int_0^{N_t} X_{t,j} dj$$

El Mundo de la Ideas y El Modelo de Variedades de Romer
La Tecnología

- Note que si $X_{t,j} = X$ para todo j y t tendríamos:

$$Y_t = AL_t^{1-\alpha} N_t X^\alpha \;\; y \;\; K_t = N_t X$$

  lo que implica:

$$Y_t = A\left(N_t L_t\right)^{1-\alpha} K_t^\alpha$$

- En la medida que los insumos se usen en cantidades idénticas, el conocimiento N_t se comporta como un progreso tecnológico aumentador de trabajo.

El Mundo de la Ideas y El Modelo de Variedades de Romer
El Sector de los Bienes Finales

- Como el sector de los bienes finales es competitivo, las empresas son tomadoras de precios.
- Las firmas maximizan:

$$\Pi_t = Y_t - w_t L_t - \int_0^{N_t} p_{t,j} X_{t,j} dj$$

  donde w_t es el salario y $p_{j,t}$ es el precio del insumo j.
- Los beneficios este sector son cero dado RCE y las demandas de cada insumo están dadas por las CPO:

$$\begin{aligned} w_t &= \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1-\alpha) A \frac{Y_t}{L_t} \\ p_{t,j} &= \frac{\partial Y_t}{\partial X_{t,j}} = \alpha A \left(\frac{L_t}{X_{t,j}}\right)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

  para todo $j \in [0, N_t]$.

El Mundo de la Ideas y El Modelo de Variedades de Romer
El Sector de los Bienes Intermedios

- Existe competencia monopolística en el sector de los bienes intermedios.
- Cada empresa enfrenta una demanda que tiene pendiente negativa. Entonces, el productor del insumo j resuelve:

$$\Pi_{t,j} = p_{t,j}X_{t,j} - \kappa(X_{t,j})$$

sujeto a la curva de demanda:

$$X_{t,j} = L_t\left(\frac{\alpha A}{p_{t,j}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

donde $\kappa(X_{t,j})$ representa el costo de producir $X_{j,t}$ en términos de unidades del bien final.
- Suponemos que la función de costos es lineal:

$$\kappa(X_{t,j}) = X_{j,t}$$

El supuesto implícito es que la tecnología de producción de bienes intermedios es la misma que la usada para producir el bien final.

El Mundo de la Ideas y El Modelo de Variedades de Romer
El Sector de los Bienes Intermedios

- De las CPO, el precio óptimo satisface:

$$p_{t,j} = p = \frac{1}{\alpha} > 1$$

- La oferta óptima es a su vez:

$$X_{t,j} = xL$$

con $x = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}$.
- Los beneficios resultantes son:

$$\Pi_{t,j} = \pi L$$

con $\pi = (p-1)x = \frac{1-\alpha}{\alpha}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}$.
- Note que el precio es mayor que el costo marginal $p = \frac{1}{\alpha} > \kappa'(X) = 1$. El gap es el mark-up que las firmas cargan a sus compradores.

El Mundo de la Ideas y El Modelo de Variedades de Romer
El Sector de Innovación

- El valor presente de los beneficios del bien intermedio j desde el período t está dado por:

$$V_{t,j} = \sum_{\tau=t} \frac{q_\tau}{q_t} \Pi_{\tau,j} \;\; o \;\; V_{t,j} = \Pi_{t,j} + \frac{V_{t+1,t}}{1 + R_{t+1}}$$

- Como $\Pi_{t,j} = \pi L$ para todo j y t. Entonces, mientras la economía siga una senda de crecimiento balanceado deberíamos esperar $R_t = R$ para todo t. Entonces:

$$V_{t,j} = V = \frac{\pi L}{R/(1+R)} \approx \frac{\pi L}{R}$$

- Interpretación:
  - El costo de oportunidad de mantener un activo de valor V con "blueprint" en lugar de invertir en bonos es RV.
  - El dividendo que el activo paga en cada período es πL.
  - Arbitraje: Dividendos = Costos de Oportunidad.

El Mundo de la Ideas y El Modelo de Variedades de Romer
El Sector de Innovación

- Los "blueprints" son producidos con las misma tecnología del bien final: Los innovadores compran bienes finales y los transforman en "blueprints" a tasa $1/\eta$.
- Entonces: ΔN nuevos "blueprints" tienen un costo de $\eta \Delta N$. $\eta > 0$ es el costo de I+D en unidades del producto final.
- El valor de los ΔN nuevos "blueprints" es: $V \Delta N$, donde $V = \pi L / R$.
- Los beneficios netos de las firmas investigadoras son:

$$\Pi_{I+D} = (V - \eta) \Delta N$$

- Libre entrada y salida del sector innovador impone $\Pi_{I+D} = 0$, entonces:

$$V = \eta$$

El Mundo de la Ideas y El Modelo de Variedades de Romer
Las Familias

- La familia representativa resuelve el siguiente problema:

$$\max_{\{c_t, a_{t+1}\}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$
$$s.a \quad c_t + a_{t+1} \leq w_t + (1+R_t)a_t$$

- La condición de Euler usual es:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta(1+R_{t+1})$$

y suponiendo una función de utilidad instantánea CRRA:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = [\beta(1+R_{t+1})]^{\frac{1}{\sigma}}$$

El Mundo de la Ideas y El Modelo de Variedades de Romer
La Restricción de Recursos y el Equilibrio

- El bien final se usa para consumo C_t, para la producción de bienes intermedios $K_t = \int_0^{N_t} X_{t,j} dj$, o para la producción de "blueprints" en el sector innovador $\eta \Delta N_t$.
- La restricción de Recursos es

$$C_t + K_t + \eta \Delta N_t = Y_t$$

donde $C_t = c_t L$ y $\Delta N_t = N_{t+1} - N_t$.

- La suma de las restricciones de recursos de los distintos agentes y las condiciones de clareo de mercado deberían reducirse a esta restricción de recursos. ¿Esto ocurre? ¿Cuáles son las condiciones de clareo de mercado?

- Del valor de la innovación de la condición de libre entrada sabemos: $V = \pi L/R = \eta$, entonces:

$$R = \frac{\pi L}{\eta} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}L}{\eta}$$

confirmando que la tasa de interés es estacionaria.

- En la ecuación de Euler tenemos:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left[\beta(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}L}{\eta})\right]^{\frac{1}{\sigma}}$$

- También note que la restricción de recursos se reduce a:

$$\frac{C_t}{N_t} + X + \eta\left[\frac{N_{t+1}}{N_t} - 1\right] = \frac{Y_t}{N_t} = AL^{1-\alpha}X^{\alpha}$$

donde $X = xL = K_t/N_t$.

- Note que C_t/N_t es constante en la senda de crecimiento balanceado y por tanto C_t, N_t, K_t y Y_t crecen a la misma tasa $1+\gamma$:

$$1+\gamma = \left[\beta(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}L}{\eta})\right]^{\frac{1}{\sigma}}$$

- Las tasa de crecimiento:
  - Decrece con η (el costo de producir conocimiento).
  - Es creciente en L y en cualquier factor que incremente la escala (aumentando beneficios en el sector de bienes intermedios y la demanda en el innovador): *Efecto Escala*

- El Planificador central elige $\{C_t, (X_{j,t})_{j\in[0,N_t]}, N_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ de tal manera de maximizar la utilidad sujeto a la restricción de recursos y a la tecnología.
- Por simetría en la producción el planificador elige: $X_{j,t} = X_t = x_t L$ para todo j.
- El problema entonces es

$$\max_{\{C_t,(X_{j,t})_{j\in[0,N_t]},N_{t+1}\}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$
$$s.a \qquad C_t + N_t X_t + \eta(N_{t+1} - N_t) = Y_t = AL^{1-\alpha} N_t X_t^{\alpha}$$

donde $C_t = c_t L$.
- De la condición de primer orden con respecto a X_t tenemos:

$$X_t = x^* L$$

donde $x^* = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$ es el nivel óptimo de de producción de bienes intermedios.

- De la condición de Euler tenemos la tasa de crecimiento óptima:

$$1 + \gamma^* = \frac{c_{t+1}}{c_t} = \left[\beta(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} L}{\eta})\right]^{\frac{1}{\sigma}}$$

note que $R^* = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} L}{\eta}$ y representa el retorno social de los ahorros.
- Note que:

$$x^* = x\alpha^{-\frac{1}{1-\alpha}} > x$$

El nivel de producción de bienes intermedios es mayor en el óptimo de Pareto. Esto refleja la distorsión del monopolista. El gap $x^*/x = 1/\alpha$ es el mark-up.

- De manera similar:
$$R^* = R\alpha^{-\frac{1}{1-\alpha}} > R$$
El retorno privado de los ahorros es menor que el social, de nuevo, gracias a la distorsión del monopolista.
- De lo anterior se sigue que:
$$1 + \gamma^* > 1 + \gamma$$
La tasa de crecimiento en el óptimo de Pareto es mayor.